Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie
Blatt 3

Abgabe von: Mein Name
TutorIn: Mein(e) Lieblingstutor(in)

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 19 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 3.1 **[0,5+1+0,5+2 Punkte]**

Sei $R := \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f \in \mathbb{Q}[x]$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Betrachten Sie $f(x) := x^3 + 2x + 1$.

  (i) Beweisen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

  (ii) Zeigen Sie, dass $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Betrachten Sie $f(x) := x^3 + x + 4$.

  (i) Beweisen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

  (ii) Zeigen Sie, dass $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

Lösung:

Aufgabe 3.2 **[0,5+1+2+0,5 Punkte]**

Sei $R := \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(x) := x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$, $L := \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\beta := \frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

(a) Beweisen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie $\beta^3 - 3\beta^2 - 10\beta - 8 = 0$.

(c) Bestimmen Sie $D(1, \alpha, \beta)$.

(d) Folgern Sie, dass $\{1, \alpha, \beta\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

Lösung:

Aufgabe 3.3 **[3+1 Punkte]**

Sei L ein Zahlkörper über $\mathbb{Q}$ des Grades $n := [L : \mathbb{Q}] \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{O}_L$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $L/\mathbb{Q}$.

(a) Beweisen Sie, dass wenn der Absolutbetrag $|D(v_1, \ldots, v_n)| \in \mathbb{N}$ der Diskriminante von $\mathcal{B}$ minimal über alle Basen von $L/\mathbb{Q}$ ist, $\mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Folgern Sie einen Algorithmus zur Ermittlung einer Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$.

Lösung:

Aufgabe 3.4* **[3+1 Punkte]**

Sei $R := \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(x) := x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$, $L := \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\gamma \in \mathcal{O}_L$.

(a) Beweisen Sie, dass $D(1, \gamma, \gamma^2)$ gerade ist.

(b) Folgern Sie, dass $\{1, \gamma, \gamma^2\}$ keine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathbb{Z}$ ist.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 08. Juli 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor / die Tutorin. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.